

APPLIED MATHEMATICS-III

Time Allowed : 2:30 Hours

Maximum Marks : 50

- Notes: (i) Attempt all questions.
(ii) Students are advised to specially check the numerical data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi translation of any question, the students should answer the question according to the English version.
(iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

Q.1. Attempt any ten parts of the following :

[10×1=10]

- (a) Find transpose conjugate of matrix $A = \begin{bmatrix} 3+2i & -i & 1+2i \\ 4-5i & 7 & 4+5i \\ 1-2i & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
- (b) Find $A-B$ if $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- (c) Find the value of $\text{Curl } \vec{r}, \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.
- (d) If $y = xe^x$ then find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$.
- (e) Find the Laplace transform of the function: $f(t) = (\sin t - \cos t)$.
- (f) Find the degree of the differential equation $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0$.
- (g) Solve the equation $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$.
- (h) Evaluate $\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx$.
- (i) If $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ then find $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$.
- (j) Find $\text{div } \vec{F}$ for $\vec{F} = x^2y\hat{i} - (z^3-3x)\hat{j} + 4y^2\hat{k}$.
- (k) What is the probability of getting a sum of 10 when two dice are thrown?
- (l) if $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, Find $\text{grad } r$.

Q.2. Attempt any five parts of the following :

- (a) Find the rank of matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- (b) Prove that $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{r}) = 0$.
- (c) Prove that $\sqrt{y_2} = \sqrt{\pi}$.
- (d) Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}, y \neq 2$.
- (e) Savita and Sangeeta are friends. What is the probability that both will have different birthdays? (ignoring a leap year)
- (f) Evaluate $L^{-1} \left\{ \frac{7}{p-5} \right\}$.
- (g) Verify Euler's theorem in following case: $u = x^3 \log \frac{y}{x}$.

Q.3. Attempt any two parts of the following :

[2×5=10]

- (a) Find the Eigen Values and Eigen vectors for matrix $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- (b) If $u = \cos^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, prove that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \cot u = 0$.
- (c) Find $L^{-1} \left[\frac{p^2 + 9p + 2}{(p-1)^2(p+3)} \right]$.

Q.4. Attempt any two parts of the following :

[2×5=10]

- (a) Find the Fourier sine series for the function: $f(x) = x, 0 < x < 2$.
- (b) Solve: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = e^x$.
- (c) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, show that $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$.

Q.5. Attempt any two parts of the following :

[2×5=10]

- (a) Solve the differential equation. $\frac{dx}{dt} + 9x = 12, x(0) = 1$ using Laplace transform.
- (b) A box contains 10 black and 10 white balls. Find the probability of drawing two balls of the same colour.
- (c) Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ when $y(1)=1$.

APPLIED MATHEMATICS III

Time Allowed : 2:30 Hours

Maximum Marks : 50

- नोट : (i) सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
 (ii) परीक्षार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे प्रश्न पत्र के दोनों अनुसूची में दी गई सभी प्रश्नों का विचार करें और मिलान कर लें। यदि हिन्दी अनुवाद के किसी प्रश्न में किसी प्रकार की भिन्नता है, तो परीक्षार्थी प्रश्नों के अनुसार प्रश्न का उत्तर दें।
 (iii) विद्यार्थियों को पेजर और मोबाइल फोन के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

(10/-10)

प्र.1. निम्नलिखित में से किन्हीं दस भागों को हल कीजिए :

- (अ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3+2i & -1 & 1+2i \\ 4-5i & 7 & 4+5i \\ 1-2i & 6 & 2 \end{bmatrix}$ का परिवर्त, संगुणित ज्ञात कीजिए।
- (ब) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो $A+B$ का मान ज्ञात कीजिए।
- (स) $\text{Curl } \vec{r}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ।
- (द) यदि $y = xe^x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।
- (य) फलन $f(t) = (\sin t - \cos t)$ का लॉलास खान्तर ज्ञात कीजिए।
- (र) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$ की घात ज्ञात कीजिए।
- (ल) समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 6y = 0$ को हल कीजिए।
- (व) $\int_0^{\pi} x^{1/2} e^{-x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
- (त) यदि $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ है, तो $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ ज्ञात कीजिए।
- (थ) $\text{div } \vec{r}$ ज्ञात कीजिए यदि $\vec{r} = x^2y\hat{i} - (z^3 - 3x)\hat{j} + 4y^2\hat{k}$ ।
- (ध) दो पासे उछालने पर योग 10 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी?
- (न) यदि $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\text{grad } r$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र.2. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच भागों को हल कीजिए :

(अ) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ की जाति (rank) ज्ञात कीजिए।

(ब) सिद्ध कीजिए: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

(स) सिद्ध कीजिए: $\sqrt{y_2} = \sqrt{y_1}$

(द) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}, y \neq 2$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(य) सविता और संगीता दोनों मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों के जन्मदिन विभिन्न दिनों में? (लीप वर्ष को छोड़ते हुए)

(र) $L^{-1} \left\{ \frac{7}{p-5} \right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ल) निम्न के लिए Euler's theorem को सत्यापित कीजिए: $u = x^3 \log \frac{y}{x}$

प्र.3. निम्नलिखित में से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए :

[2/5=10]

(अ) आव्यूह के लिए अभिलक्षणिक मान तथा अभिलक्षणिक सदिश का मान ज्ञात कीजिए $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

(ब) यदि $u = \cos^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ है, तो सिद्ध कीजिए $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \cot u = 0$.

(स) $L^{-1} \left[\frac{p^2 + 9p + 2}{(p-1)^2(p+3)} \right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र.4. निम्नलिखित में से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए :

[2/5=10]

(अ) फलन $f(x) = x, 0 < x < 2$ के लिए Fourier sine series ज्ञात कीजिए।

(ब) हल कीजिए: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = e^x$.

(स) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, सिद्ध कीजिए $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$.

प्र.5. निम्नलिखित में से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए :

[2/5=10]

(अ) अवकल समीकरण को Laplace transform विधि से हल कीजिए $\frac{dx}{dt} + 9x = 12, x(0) = 1$

(ब) एक डिब्बे में 10 काली और 10 सफेद गेंदे हैं। एक ही रंग की दो गेंदें निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(स) हल कीजिए: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ यदि $y(1)=1$

----- X -----